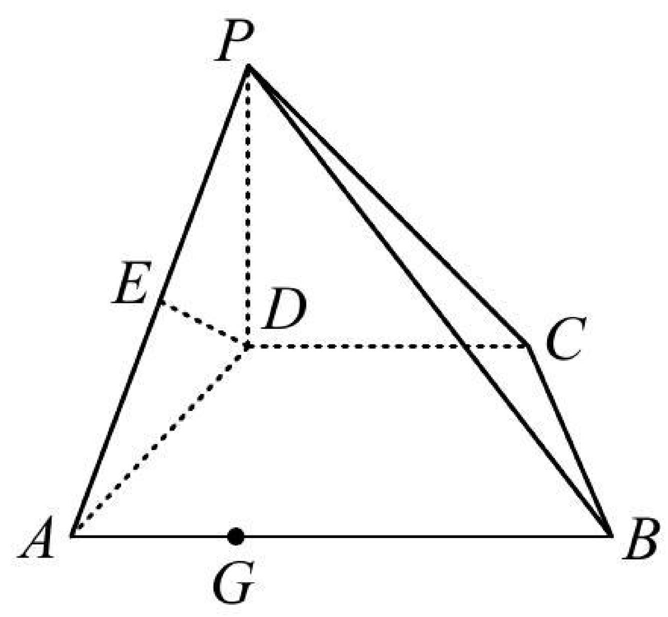
模块二 位置关系的判定

第 1 节 平行关系证明思路大全（★★）

强化训练

1．（2022•吉林延边一模•★★）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\,//\,CD$，$AB\perp AD$，$AB=2CD=2AD=2$，$\angle PAD=45^\circ$，E 是 PA 的中点，G 在线段 AB 上，且 $CG\perp BD$，证明：$DE\,//$ 平面 PBC.

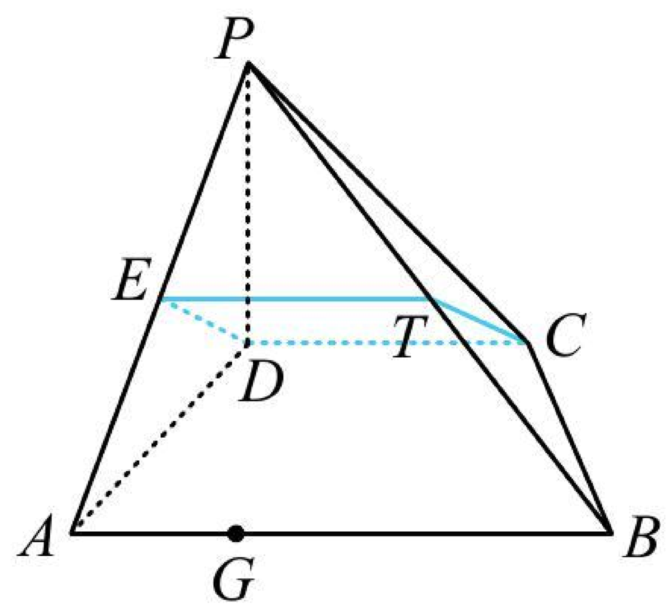


证明：（尝试过 C 作 DE 的平行线 CT，作出来就发现 $CDET$ 像平行四边形，且观察发现 T 应为中点）

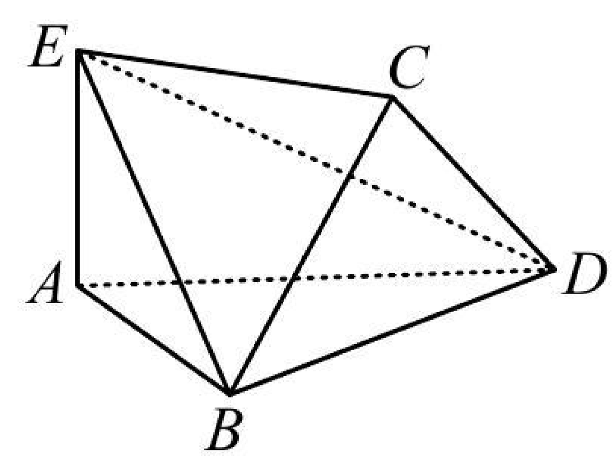
如图，取 PB 中点 T，连接 CT，ET，因为 E 为 PA 中点，所以 $ET\,//\,AB$ 且 $AB=2ET$，

又 $AB\,//\,CD$ 且 $AB=2CD$，所以 $ET\,//\,CD$ 且 $ET=CD$，从而四边形 $CDET$ 为平行四边形，故 $DE\,//\,CT$，

因为 $DE\not\subset$ 平面 PBC，$CT\subset$ 平面 PBC，所以 $DE\,//$ 平面 PBC.



2．（2022•上海模拟•★★）如图，将边长为 2 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，使平面 $ABD\perp$ 平面 CBD，若 $AE\perp$ 平面 ABD，且 $AE=\sqrt{2}$，证明：$EC\,//$ 平面 ABD.



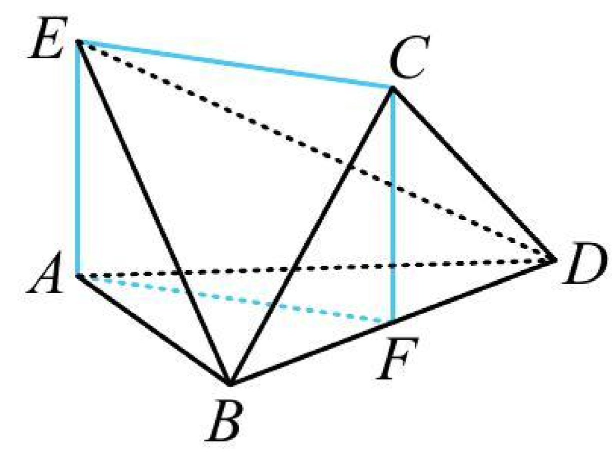
证明：（尝试过 A 作 EC 的平行线 AF，作出来就发现 $AFCE$ 像平行四边形，且观察发现 F 应为中点）

如图，取 BD 中点 F，连接 AF，CF，由题意，$\angle BCD=90^\circ$，$BC=CD=2$，所以 $CF=\sqrt{2}$，且 $CF\perp BD$，

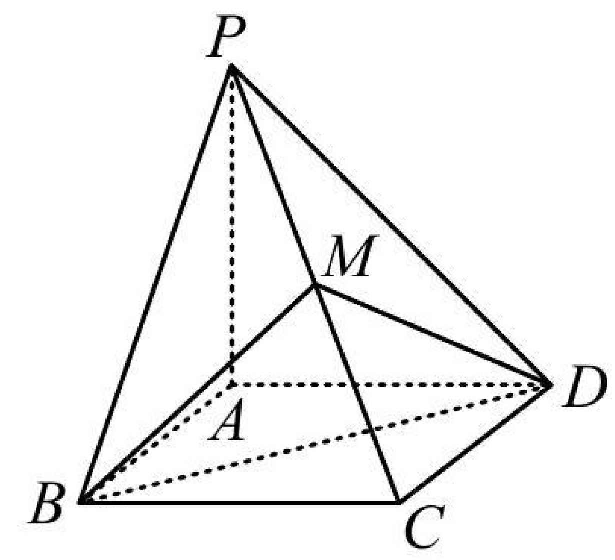
又平面 $ABD\perp$ 平面 CBD，平面 $CBD\cap$ 平面 $ABD=BD$，$CF\subset$ 平面 CBD，所以 $CF\perp$ 平面 ABD，

因为 $AE\perp$ 平面 ABD，且 $AE=\sqrt{2}$，所以 $AE\,//\,CF$ 且 $AE=CF$，故四边形 $AECF$ 为平行四边形，

所以 $EC // AF$，因为 $EC \not\subset$ 平面 ABD， $AF \subset$ 平面 ABD，所以 $EC //$ 平面 ABD.



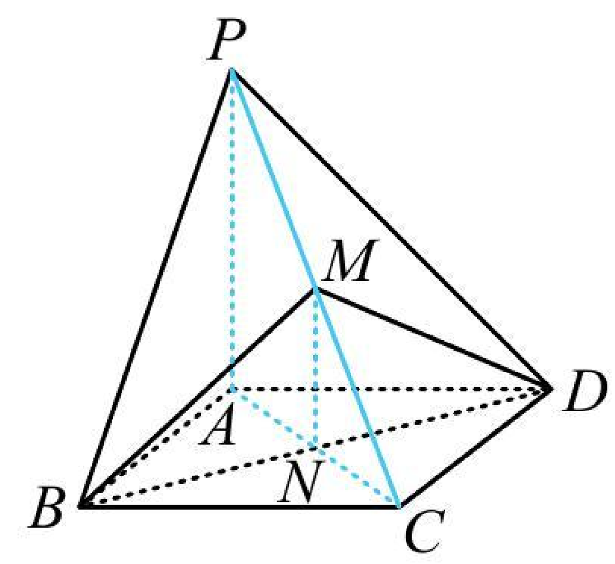
3．（2023 • 上海模拟 • ★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，M 为 PC 的中点，证明：$PA //$ 平面 MBD.



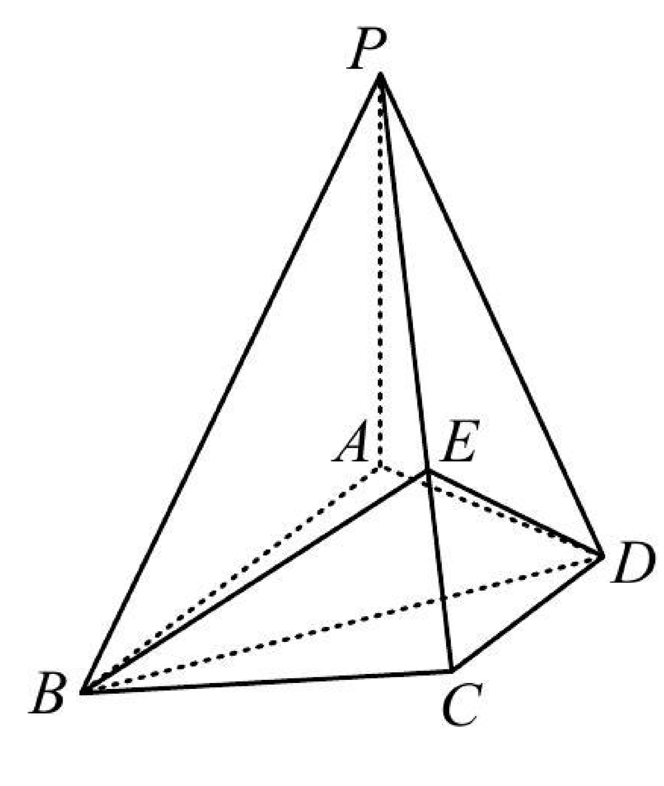
证明：（观察发现 PA 和 C 位于平面 MBD 的两侧，由内容提要 2 的①可知只需连接 AC，证明 $PA // MN$ 即可）

如图，连接 AC 交 BD 于点 N，连接 MN，因为底面 $ABCD$ 为平行四边形，所以 N 为 AC 的中点，

又 M 为 PC 的中点，所以 $PA // MN$，因为 $PA \not\subset$ 平面 MBD， $MN \subset$ 平面 MBD，所以 $PA //$ 平面 MBD.



4．（2022 •黑龙江哈尔滨模拟 •★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA \perp$ 底面 $ABCD$，$AB // DC$，$AD \perp AB$，$AB = AP = 2$， $DA = DC = 1$，E 为 PC 上一点， $PE = \frac{2}{3}PC$，证明：$PA //$ 平面 BDE.

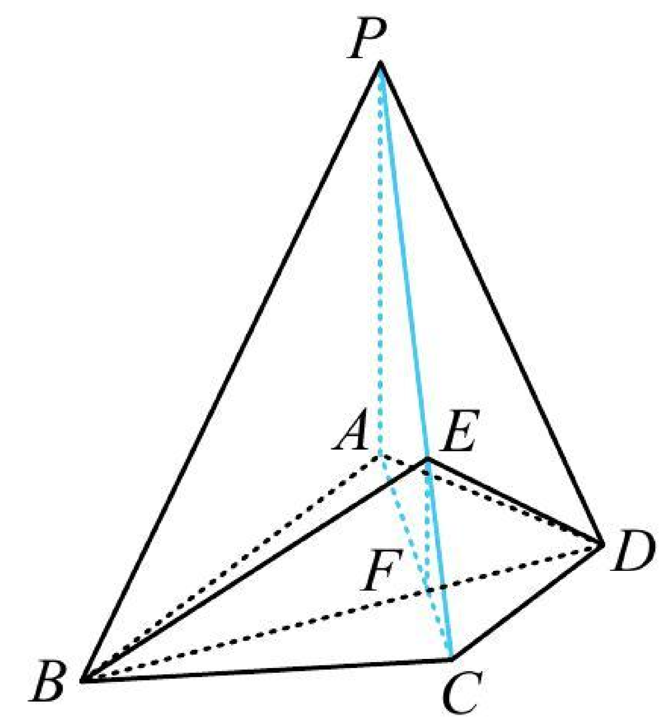


证明：（观察发现 PA 和 C 位于面 BDE 两侧，由内容提要 2 的①可知只需连接 AC，证明 PA 平行于交线 EF 即可，但观察发现 F 不是中点，故考虑通过证线段成比例来证平行）

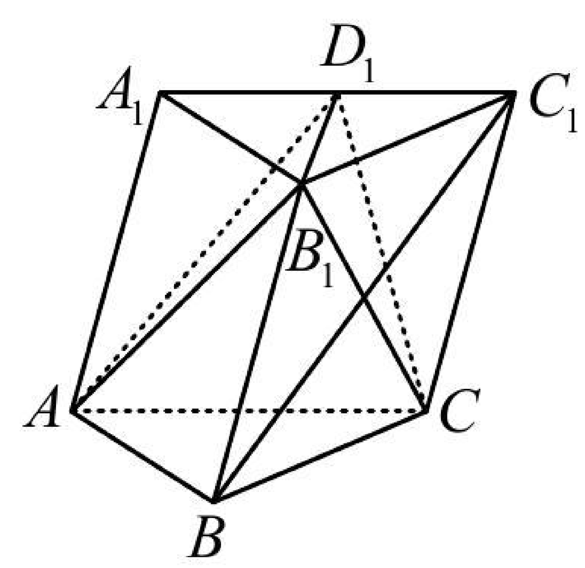
如图，连接 AC 交 BD 于点 F，连接 EF，因为 $AB // DC$，所以 $\Delta CFD \backsim \Delta AFB$，故 $\frac{CF}{AF} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$，

又 $PE = \frac{2}{3}PC$，所以 $\frac{CE}{PE} = \frac{1}{2}$，从而 $\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{PE}$，故 $EF // PA$，

因为 $PA\not\subset$ 平面 BDE， $EF\subset$ 平面 BDE，所以 $PA//$ 平面 BDE.



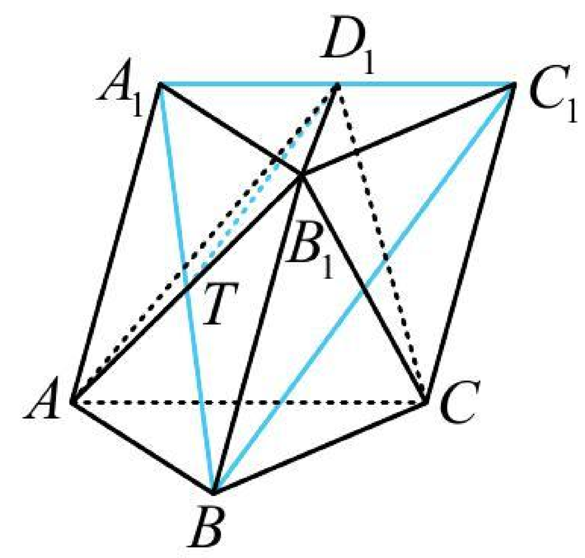
5．（2022 • 广西河池模拟 • ★★）如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 D_1 为 A_1C_1 的中点，证明： $BC_1//$ 平面 AB_1D_1.



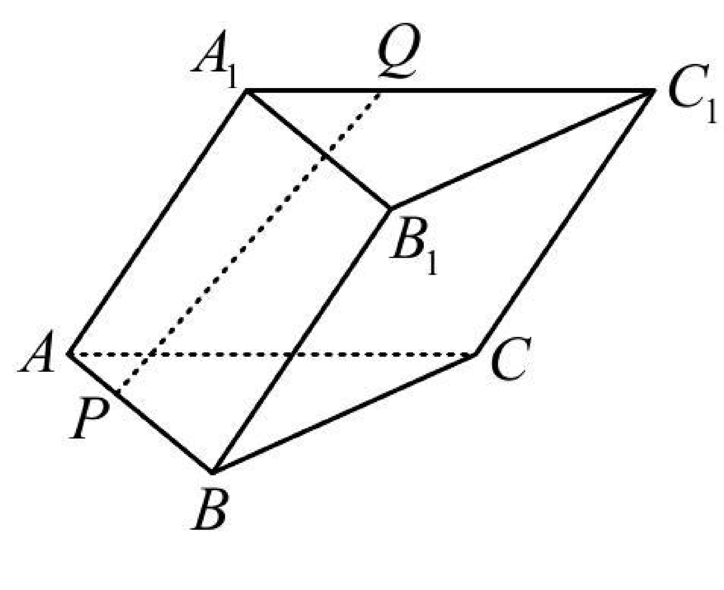
证明：（观察发现 BC_1 和 A_1 位于面 AB_1D_1 两侧，由内容提要 2 的①可知只需连接 A_1B，证明 $BC_1//D_1T$ 即可）

如图，连接 A_1B 交 AB_1 于点 T，因为 ABB_1A_1 是平行四边形，所以 T 为 A_1B 的中点，

又 D_1 为 A_1C_1 的中点，所以 $D_1T//BC_1$，因为 $BC_1\not\subset$ 平面 AB_1D_1， $D_1T\subset$ 平面 AB_1D_1，所以 $BC_1//$ 平面 AB_1D_1.



6．（★★）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2， $\angle BAC=\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^{\circ}$，$P$，$Q$ 分别在 AB， A_1C_1 上（不包括端点）， $AP=A_1Q$，证明：$PQ//$ 平面 BCC_1B_1.



证法 1：（先过 C_1 作 PQ 的平行线，观察发现 PQC_1D 像平行四边形，思路就有了）

如图 1，作 $PD//AC$ 交 BC 于 D，则 ΔBPD 是正三角形，设 $AP=A_1Q=x(0<x<2)$，则 $BP=2-x$，

所以 $PD=2-x$， 又 $C_1Q=A_1C_1-A_1Q=2-x$，所以 $PD=C_1Q$，

因为 $C_1Q//AC$，$PD//AC$，所以 $C_1Q//PD$，从而四边形 PQC_1D 是平行四边形，故 $PQ//C_1D$，

因为 $PQ\not\subset$ 平面 BCC_1B_1， $C_1D\subset BCC_1B_1$，所以 $PQ//$ 平面 BCC_1B_1.

证法 2：（若没想到构造平行四边形，也可尝试造面，不妨先过 P 作面 BCC_1B_1 的平行线）

如图2，作 $PE /\!/ BC$ 交 AC 于 E，连接 QE，因为 $PE \not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BC \subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $PE /\!/$ 平面 BCC_1B_1 ①，

由题意，ΔABC 是正三角形，所以 ΔAPE 也是正三角形，故 $AE = AP$，又 $AP = A_1Q$，所以 $AE = A_1Q$，

结合 $AE /\!/ A_1Q$ 可得四边形 AA_1QE 是平行四边形，所以 $QE /\!/ AA_1$，又 $AA_1 /\!/ CC_1$，所以 $QE /\!/ CC_1$，

因为 $QE \not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $QE /\!/$ 平面 BCC_1B_1 ②，

因为 QE，$PE \subset$ 平面 PQE，$QE \cap PE = E$，结合①②可得平面 $PQE /\!/$ 平面 BCC_1B_1，

因为 $PQ \subset$ 平面 PQE，所以 $PQ /\!/$ 平面 BCC_1B_1.

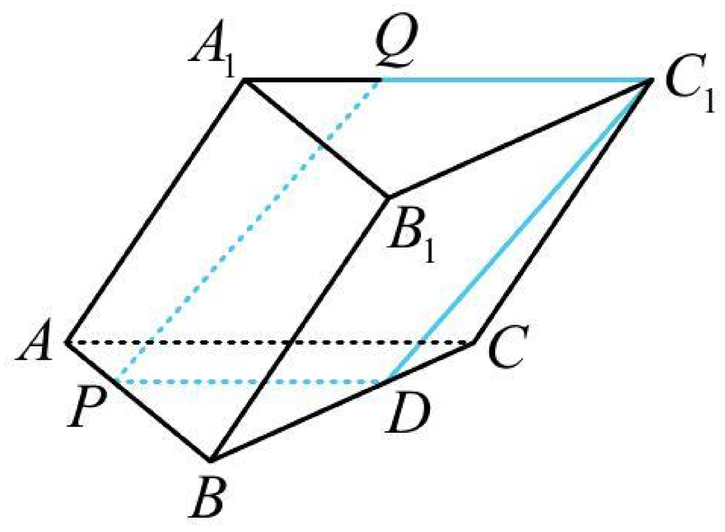


图1

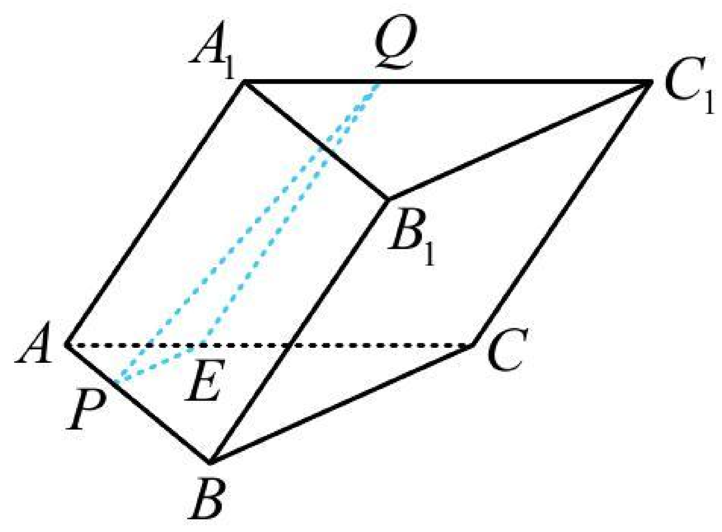
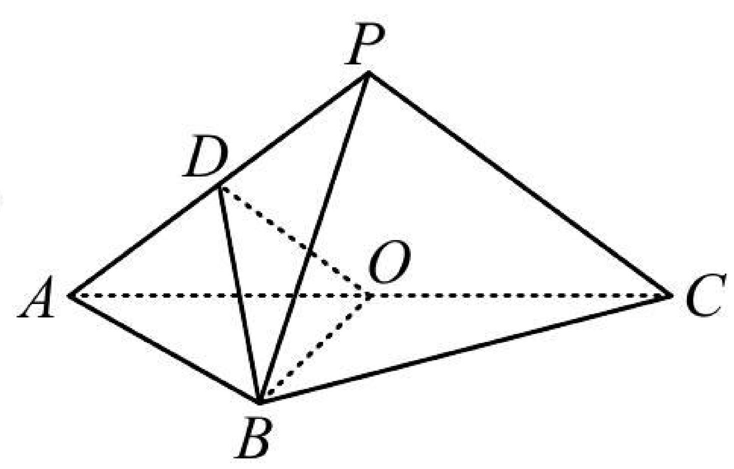


图2

7.（2023 • 陕西模拟 • ★★）如图，平面 $PAC \perp$ 平面 ABC，$AB \perp BC$，$AB = BC$，D 为 PA 的中点，点 O 在 AC 上，且 $OD /\!/$ 平面 PBC，证明：O 为 AC 中点.

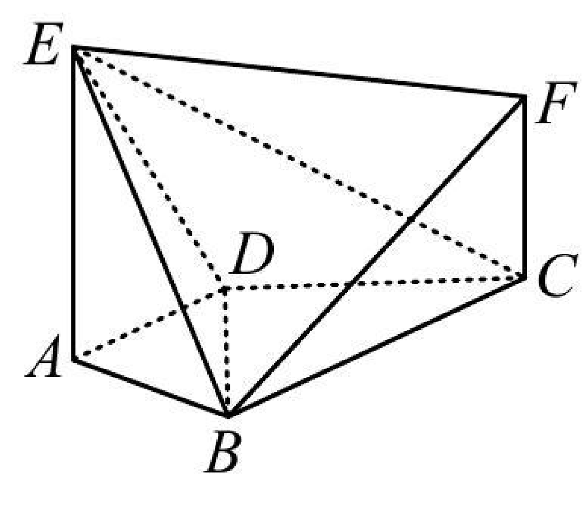


证明：（给了线面平行，故考虑线面平行的性质定理）

因为 $OD /\!/$ 平面 PBC，$OD \subset$ 平面 PAC，平面 $PAC \cap$ 平面 $PBC = PC$，所以 $OD /\!/ PC$，

又由题意，D 为 PA 的中点，所以 O 为 AC 的中点.

8.（2023 •湖北模拟 •★★）如图，$AE \perp$ 平面 $ABCD$，$BF /\!/$ 平面 ADE，$CF /\!/ AE$，$AD \perp AB$，$AB = AD = 2$，$AE = BC = 4$，证明：$AD /\!/ BC$.



证明：（条件中有线面平行，要证的是线线平行，这些都提示了我们该考虑性质定理，结合图形知可先证面 $BCF /\!/$ 面 ADE，再用面面平行的性质定理证结论）

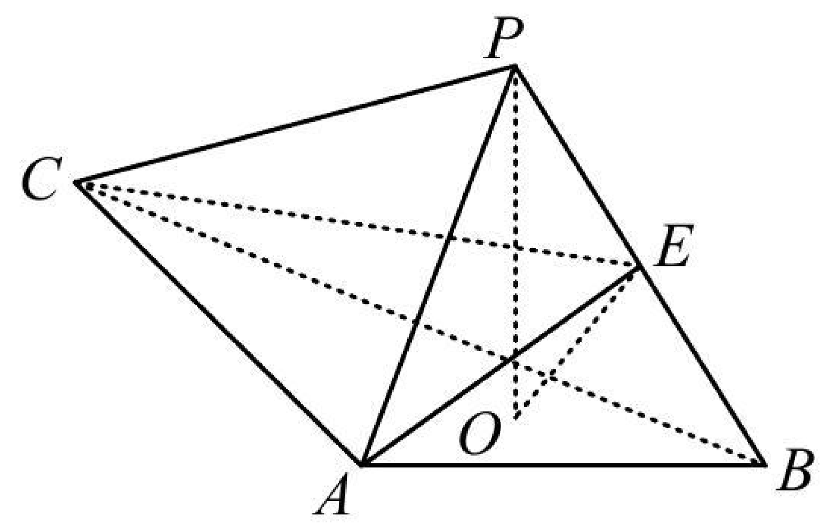
因为 $CF /\!/ AE$，$CF \not\subset$ 平面 ADE，$AE \subset$ 平面 ADE，所以 $CF /\!/$ 平面 ADE，

又由题意，$BF /\!/$ 平面 ADE，且 CF，$BF \subset$ 平面 BCF，$CF \cap BF = F$，所以平面 $BCF /\!/$ 平面 ADE，

因为平面 $ABCD \cap$ 平面 $BCF = BC$，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ADE = AD$，所以 $AD /\!/ BC$.

9.（2022 • 新高考Ⅱ卷节选 • ★★★）如图，PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，$PA = PB$，$AB \perp AC$，E 为 PB

的中点，证明：OE∥平面PAC.



证法 1：（观察发现OE和B在面PAC的同侧，符合内容提要 2 中②的情况，故可通过延长BO找平行线）

连接OA，延长BO交AC于点G，连接PG，如图 1，

（要证OE∥PG，结合E为PB中点知只需证O为BG中点，注意到$\angle BAG=90^\circ$，故又只需证$AO=OB$）

因为PO是三棱锥$P-ABC$的高，所以$PO\perp$平面ABC，又OA，$OB\subset$平面ABC，故$PO\perp OA$，$PO\perp OB$，

结合$PA=PB$，$PO=PO$可得$\Delta POA\cong\Delta POB$，所以$OA=OB$，又$AB\perp AC$，所以$O$为$BG$中点，

因为E为PB中点，所以OE∥PG，因为$OE\not\subset$平面PAC，$PG\subset$平面PAC，所以OE∥平面PAC.

证法 2：（若没想到证法 1 的方法，也可通过造面来证结论，不妨先过点E作PA的平行线交AB于F，F应为AB的中点，观察发现构造的面即为EOF，思路就有了）

取AB中点F，连接EF，OF，PF，如图 2，因为E是PB中点，所以EF∥PA，

又$EF\not\subset$平面PAC，$PA\subset$平面PAC，所以EF∥平面PAC ①；

（再证OF∥平面PAC，只需证OF∥AC，结合$AC\perp AB$知又只需证$OF\perp AB$）

因为PO是三棱锥$P-ABC$的高，所以$PO\perp$平面ABC，又$AB\subset$平面ABC，所以$AB\perp PO$，

因为$PA=PB$，所以$AB\perp PF$，而PO，$PF\subset$平面POF，$PO\cap PF=P$，所以$AB\perp$平面POF，

因为$OF\subset$平面POF，所以$OF\perp AB$，又$AC\perp AB$，且AC，OF，AB都在平面ABC内，所以OF∥AC，

因为$OF\not\subset$平面PAC，$AC\subset$平面PAC，所以OF∥平面PAC ②；

因为OF，$EF\subset$平面OEF，$OF\cap EF=F$，结合①②可得平面OEF∥平面PAC，

又$OE\subset$平面OEF，所以OE∥平面PAC.

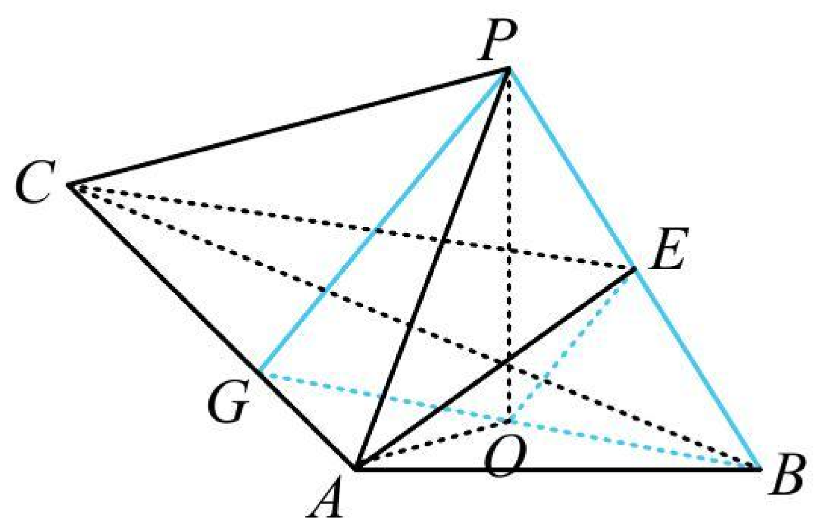


图1

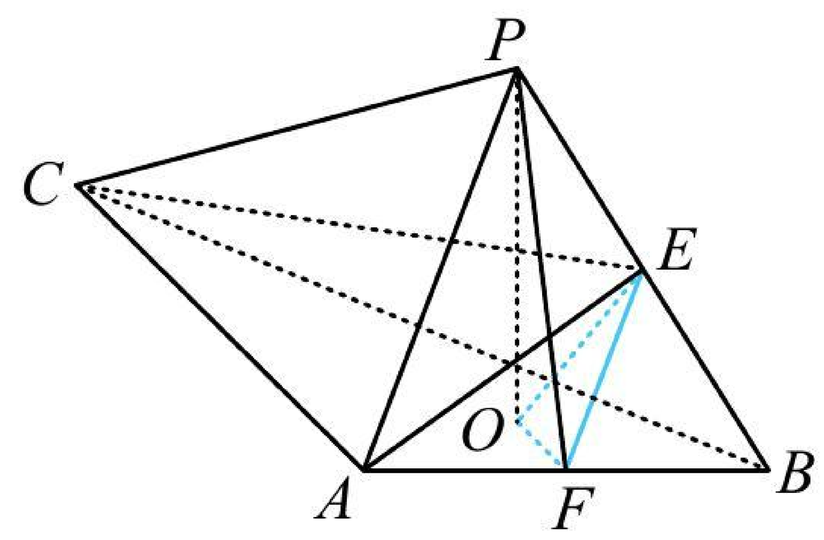


图2

【反思】证线面平行时，很多题目内容提要里涉及的三种思路常常都可以做，但复杂度可能有差异.